الحركة المستوية للأجسام الصلبة

(Plane Motion of Rigid Bodies)

5-1 تمهيد

سندرس في هذا الفصل الحركة المستوية للأجسام الصلبة المؤلفة من عدد كبير من الجسيمات التي تبقى المسافة بينها ثابتة دوماً ، فتكون القوى التي تبقيها بهذا الشكل داخلية محققة لقانون نيوتن الثالث، كأنها ناتجة عن ترابط الذرات ببعضها بوساطة قضبان صلبة مهملة الكتلة. من ثم نستطيع تطبيق قوانين حفظ الطاقة والزخم الخطي والدوراني على هذه الأجسام.

من جهة أخرى ، تتألف الأجسام الصلبة من عدد كبير جداً من الذرات والجزيئات ، لذلك نقسم حركة الجسم إلى جزئين؛ الأول الحركة الدورانية لنقطة معينة منه بالنسبة لمناط إسناد ثابت، والثاني الحركة الدورانية لكل نقاط الجسم حول محور متحرك مار من هذه النقطة.

نتساءل هنا: كم عدد الإحداثيات اللازمة لتحديد موضع الجسم كله؟ قد يتبادر لأول وهلة أنه لانهائي لأن الجسم يحوي عدداً كبيراً جداً من الجسيمات النقطية، إلاّ أن هذا غير صحيح إذ يمكن تحديد موضع نقطة منه P_1 بثلاثة إحداثيات (x_1, y_1, z_1)، عندئذ تقع أي نقطة ثانية، P_2، تبعد عن P_1 مسافة r، على كرة مركزها P_1 ونصف قطرها r. حينئذ نحتاج لإحداثيين فقط لتحديد موضع P_2 على هذه الكرة، بالنسبة لمنظومة إحداثية مركزها P_1، كالزاويتين الكرويتين θ و ϕ. أخيراً، فإن أي نقطة ثالثة، P_3، تبعد مسافة $a \neq 0$ عن الخط الواصل بين P_1 و P_2، يجب أن تقع على دائرة نصف قطرها a حول هذا الخط. لتحديد مكان P_3 على هذا الخط نحتاج لإحداثي واحد، كالزاوية القطبية θ. عندما يتم تحديد مواضع ثلاث نقاط من جسم صلب، لاتقع في نفس المستوي، فإن مواقع بقية نقاطه يتحدد تماماً.

نستنتج مماتقدم أننا نحتاج لستة إحداثيات لتحديد الجسم الصلب كله، يتم اختيارها بحسب المسألة المطروحة. نستخدم عادة ثلاثة منها لتحديد موقع مركز

الكتلة، الذي درسنا كيفية إيجاده لمنظومة جسيمات نقطية وأجسام ممتدة في الفصل السابق، والبقية لتحديد اتجاه الجسم بالنسبة له.

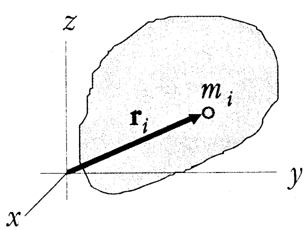
2-5 دوران الجسم الصلب حول محور ثابت

عند دراسة الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور نستعمل قانون نيوتن الثاني:

$$\boldsymbol{\tau}_z = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} \qquad (1-5)$$

حيث $\boldsymbol{\tau}_z$ محصلة العزوم الخارجية المؤثرة على الجسم بالنسبة لمحور الدوران، و $\mathbf{L}_z$ الزخم الزاوي للجسم بالنسبة لهذا المحور.

من أسهل الحركات الدورانية للأجسام الصلبة تلك التي تتم حول محور ثابت حيث تبقى حركة كل نقطة من الجسم في نفس المستوى دوماً. فإذا كان محور الدوران oz، فنلاحظ أن كل نقطة من الجسم الصلب الموجودة في الموضع $\mathbf{r}_i=(x_i, y_i)$ تتحرك على مسار دائري نصف قطره r_i عندما يدور الجسم حول oz، كما في الشكل (1-5).



الشكل (1-5)

نكتب الزخم الزاوي للجسيم m_i الموجود على بعد r_i من محور الدوران:

$$l_i = r_i p_i = m_i r_i v_i \qquad (2-5)$$

لكن:

$$v_i = r_i \dot{\theta}_i \qquad (3-5)$$

حيث $\dot{\theta}_i$ السرعة الزاوية لدوران m_i حول oz، فيصير الزخم الزاوي لـ m_i مساوياً لـ :

$$l_i = m_i r_i^2 \dot{\theta}_i \qquad (4-5)$$

أي أن الزخم الزاوي للجسم الصلب كله حول oz هو:

$$L_z = \sum l_i = \sum m_i r_i^2 \dot{\theta}_i \qquad (5-5)$$

حيث يمتد المجموع على كل أجزاء الجسم الصلب.

نظراً لأن السرعة الزاوية $\dot{\theta}_i$ واحدة لكل نقاط الجسم ، نتيجة صلابته، نرمز لها بـ ω، عندئذ تؤول L_z إلى الشكل:

$$L_z = \sum (m_i r_i^2)\ \omega \qquad (6-5)$$

فإذا وضعنا:

$$I_z = \sum (m_i r_i^2) \qquad (7-5)$$

عندئذ تصير(7-5):

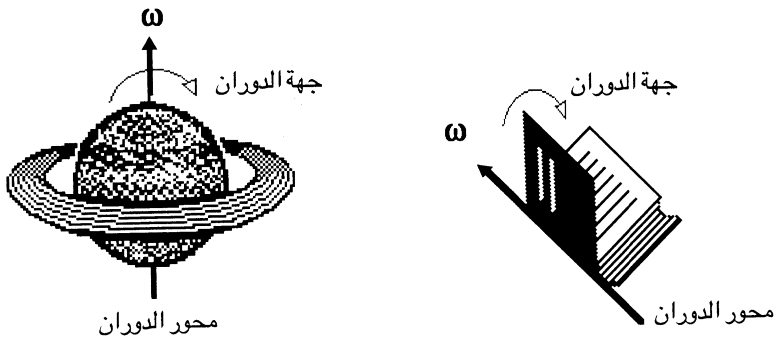
$$L_z = I_z \omega \qquad (8-5)$$

يطلق على I_z اسم عزم العطالة أو عزم القصور الذاتي *(Moment of Inertia)* للجسم الصلب حول oz وتعتمد قيمته، كما نلاحظ من (7-5)، على المحور الذى يدور حوله الجسم. هذا هو الفرق الأساس بين I_z وكتلة الجسم m، كما سنوضح بعد قليل.

لابأس من التنويه إلى أن اتجاه الزخم الزاوي لجسم يدور حول محور ثابت هو بنفس اتجاه السرعة الزاوية، أي أن $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{L}_z$ متوازيان في هذه الحالة وباتجاه حركة برغي يدور مع الجسم، كما في الشكل (2-5).

تكتب (8-5) عندئذ على النحو :

$$\mathbf{L}_z = I_z \boldsymbol{\omega} \qquad (9-5)$$



الشكل (2-5)

يمكن الحصول على قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية حول محور ثابت بالتعويض عن $\mathbf{L}_z$ من (9-5) في (1-5) فنجد:

$$\boldsymbol{\tau}_z = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \frac{d(I_z\boldsymbol{\omega})}{dt} = I_z\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \qquad (10-5)$$

بتعويض التسارع الزاوي $\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \qquad (11-5)$$

تؤول (1-5) إلى:

$$\boldsymbol{\tau}_z = I_z\boldsymbol{\alpha} \qquad (12-5)$$

بمقارنة (12-5). بقانون نيوتن الثاني في الحركة الانتقالية ($\mathbf{F}=m\mathbf{a}$) نلاحظ التناظرالتام بين الحركتين. فسبب الحركة في الحالة الانتقالية هو القوة وفي الحالة الدورانية العزم، ونتيجة الحركة في الحالة الأولى هو التسارع الخطي بينما هو التسارع الزاوي في الحالة الثانية.

يمثل عامل التناسب في كلا الحالتين مقدار ممانعة الجسم لأي تغيير في حالته الحركية.

لذا نلخص قانون نيوتن الثاني على النحو: يتناسب **سبب** الحركة *(cause)* (القوة أو العزم) طرداً مع **نتيجة** الحركة *(result)* (التسارع الخطي أو الزاوي) وعكساً مع **ممانعة** الجسم للحركة *(inertia)*(الكتلة أو عزم القصور الذاتي).

إذاً تمثل كل من m وI_z ممانعة للحركة، وإذا كانتm تمثل القصور الذاتي للجسم في الحركة الانتقالية فإنI_z تمثل عزم هذا القصور في الحركة الدورانية. فالجسم غير قادر على تغيير حالته التحريكية، سواء كانت انتقالاً أم دوراناً أم كليهما، من تلقاء نفسه، بل لابد من مؤثر خارجي لإحداث ذلك، وتكون ممانعة الجسم ومقاومته لهذا التغير هي m أوI_z بحسب نوع الحركة.

من الجدير ذكره أن انتقال الجسم يتم بشكل مباشر فليس هناك فرق تحريكي بين أي انتقال وآخر، لذلك لاتتغير كتلة الجسم مع تغيركيفية الانتقال أو مناط إسنادها. أما في الحركة الدورانية فإن طبيعة الدوران تختلف كلياً إذا تغير محور الدوران، وقد يكون هناك فرق كبير بين الدوران حول محور ما وآخر، لذا فإن عزم القصور الذاتي لجسم بالنسبة لمحور لايبقى ثابتاً، كالكتلة، بل يتغير بتغير هذا المحور. هذا هو الفرق الأساس بين هاتين الكميتين.

3-5 حساب عزم القصور الذاتي للأجسام الصلبة

يمكن حساب عزم العطالةI_z لجسم صلب حول محور ما بتجزئته إلى جسيمات متناهية في الصغر بحيث تؤول m_i في (7-5) إلى كتلة عنصرية dm تبعد عن المحور المفروض مسافة r ، وينتهي عدد هذه الجسيمات إلى مالانهاية ليصير المجموع (7-5) تكاملاً من الشكل:

$$I_z = \int r^2 dm \tag{13-5}$$

حيث يمتد التكامل على الجسم الصلب كله.

بالتعويض عن dm بدلالة كثافة الجسم ρ في التكامل نجد:

$$I_z = \int r^2 \rho dV \tag{14-5}$$

من الواضح أنه إذا كان توزع الجسم سطحياً أو طولياً فان dV في التكامل السابق تصير سطحاً عنصرياً ds أو طولاً عنصرياً dl ، على الترتيب.

❐ مثل 5-1 عزم عطالة قرص متجانس حول محور عمودي عليه عند المركز

لحساب عزم عطالة قرص متجانس حول محور عمودي عليه عند مركزه نختار كتلة عنصرية dm مؤلفة من حلقة نصف قطرها r وسمكها dr، كما في الشكل (5-3)، بحيث تبعد جميع نقاطها عن محور الدوران نفس البعد، ونكتب:

$$dI_z = r^2 dm$$

لكن:

$$dm = \sigma dS = \sigma(2\pi r dr)$$

أي أن:

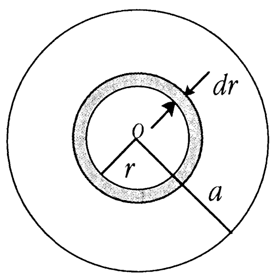
$$dI_z = r^2 dm = r^2 \sigma dS = 2\pi\sigma r^3 dr$$

ومنه:

$$I_z = \int_0^a 2\pi\sigma r^3 dr = \tfrac{1}{2}\pi\sigma a^4 = \tfrac{1}{2} ma^2$$

حيث وضعنا:

$$m = \sigma(\pi a^2)$$



الشكل (5-3) ❐

5 - 4 نصف قطر الدوران *(radius of gyration)*

نلاحظ من العلاقة (5-7) أن أبعاد عزم العطالة هي كتلة × مربع مسافة، لذلك نعبر عن عزم عطالة أي جسم صلب حول محور بالشكل:

$$I_z = Mk_z^2 \qquad (15-5)$$

حيث تدل k_z على طول يطلق عليه اسم **نصف قطر الدوران** ويمثل البعد الذي لو كان كل الجسم مجمعاً عنده لكان عزم عطالته حول المحور المفروض هو I_z.

نعطي في الجدول 5-1 قيم k_z لبعض الأجسام شائعة الاستعمال.

الجدول 5-1

قيم k_z^2 لبعض الأجسام شائعة الاستعمال (عزم القصور الذاتي = الكتلة × k_z^2)

الجسم	محور الدوران	k_z^2
قضيب رفيع	عمودي على القضيب عند المركز	$a^2/12$
طوله a	عمودي على القضيب عند طرفه	$a^2/3$
صفيحة مستطيلة مستوية	عمودي عليها ويمر من المركز	$a^2/12$
أبعادها a و b مواز لطرفها b	ماراً من المركز	$(a^2+b^2)/12$
قرص رقيق	يمر من المركز في مستويه	$a^2/4$
نصف قطره a	يمر من المركز عمودي على مستويه	$a^2/2$
حلقة رقيقة	يمر من المركز في مستويها	$a^2/2$
نصف قطرها a	يمر من المركز عمودي على مستويها	a^2
قشرة اسطوانية	محورها الطولي	a^2
نصف قطرها a وطولها b		
اسطوانة صلبة قائمة	محورها الطولي	$a^2/2$
نصف قطرها a وطولها b	يمر من مركزها وعمودي على محورها	$a^2/4+b^2/12$
قشرة كروية رقيقة نصف قطرها a	أي قطرفيها	$2a^2/3$
كرة صلبة منتظمة نصف قطرها a	أي قطر فيها	$2a^2/5$
متوازي مستطيلات صلب قائم	يمر من المركز عمودياً على الوجه ab	$(a^2+b^2)/12$
أبعاده a و b و c	موازياً للطرف c	

5-5 نظرية المحاور المتوازية والمحاور المتعامدة

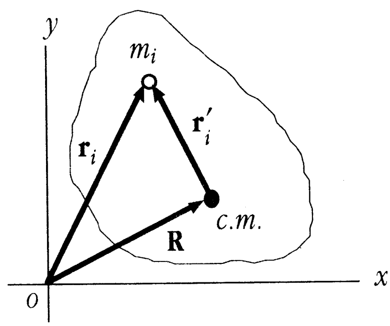
هناك نظريتان أساسيتان لحساب عزم القصور الذاتي لجسم صلب حول محور ثابت هما:

(أ) نظرية المحاور المتوازية (*Parallel Axes Theorem*)

"عزم القصور الذاتي لمنظومة جسيمات أو لجسم صلب حول محور ما يساوي مجموع عزم القصور الذاتي حول محور مار من مركز الكتلة مواز للمحور المفروض مع حاصل ضرب كتلة المنظومة أو الجسم بمربع البعد بين المحورين".

البرهان: نلاحظ من الجسم الموضح بالشكل (4-5) أن عزم القصور الذاتي حول المحور oz المار من o هو :

$$I_z = \sum m_i r_i^2 \qquad (16-5)$$



الشكل (4-5)

لكننا نلاحظ من الشكل (4-5) أن:

$$r_i^2 = R^2 + r_i'^2 + 2\mathbf{r}_i' \cdot \mathbf{R}$$

حيث $\mathbf{r}_i'$ المتجه الواصل من مركز الكتلة $c.m.$ الى موضع الجسيم i، فيكون:

$$I_z = \sum m_i R^2 + \sum m_i r_i'^2 + 2\sum m_i \mathbf{r}_i' \cdot \mathbf{R}$$

أو

$$I_z = MR^2 + \sum m_i r_i'^2 + 2\mathbf{R} \cdot \sum m_i \mathbf{r}_i'$$

بحسب تعريف مركز الكتلة، فان المجموع $\sum m_i \mathbf{r}_i'$ في الطرف الأيمن يمثل موضع مركز كتلة النظام بالنسبة للنقطة cm التي هي مركز الكتلة نفسه. هذا بالطبع يساوي الصفر، كما أن:

$$I_{cm} = \sum m_i \, r_i'^2 \tag{17-5}$$

فيكون:

$$I_z = MR^2 + I_{cm} \tag{18-5}$$

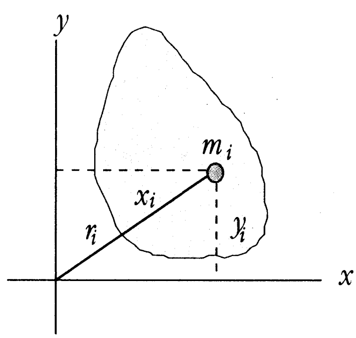
فعزم القصور الذاتي حول oz يساوي عزم القصور الذاتي حول محور يمر من مركز الكتلة موازياً لـ oz (I_{cm}) مضافاً إليه حاصل ضرب كتلة الجسم بمربع البعد بين المحورين (MR^2).

(ب) نظرية المحاور المتعامدة (*Perpendicular Axes Theorem*)

"عزم عطالة أي جسم صلب مسطح في مستو واحد حول محور عمودي على سطحه يساوي حاصل جمع عزم عطالة الجسم حول أي محورين متعامدين متقاطعين مع المحور المفروض وواقعين في مستو الجسم".

البرهان: نعتبر الجسم الصلب المسطح الموضح بالشكل (5-5) ونحسب عزم عطالته حول المحور oz العمودي على الورقة ، فنكتب:

$$I_z = \sum m_i \, r_i^2$$



الشكل (5-5)

لكننا نلاحظ من الشكل (5-5) أن :

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

فيكون :

$$I_z = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2$$

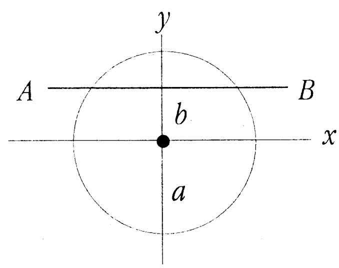
أي أن

$$I_z = I_x + I_y \qquad (19-5)$$

فعزم القصور الذاتي حول oz يساوي مجموع عزمي القصور الذاتي حول ox و oy.

مثل 2-5

ما عزم عطالة القرص المتجانس الموضح في الشكل (6-5) حول المحور AB ؟



الشكل (6-5)

الحل: سنحل هذا المثال باستخدام نظرية المحاور المتوازية ونظرية المحاور المتعامدة فإذا عرفنا عزم عطالة القرص حول المحورox في الشكل (6-5)، عندئذ نستعمل نظرية المحاور المتوازية لمعرفةI_{AB}. إلاّ أن حساب I_z بالتكامل معقد نوعاً ما، فنستخدم نظرية المحاور المتعامدة ونكتب:

$$I_z = I_x + I_y$$

حيثI_z عزم القصور الذاتي حول المحور oz العمودي على القرص في مركزه.

بحسب المثل (3-4) فإن:

$$I_z = \tfrac{1}{2} Ma^2$$

كما أن $I_x = I_y$، بسبب التناظر، لذلك نكتب:

$$I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} Ma^2$$

فيكون:

$$I_{AB} = I_x + Mb^2 = \frac{1}{4} Ma^2 + Mb^2$$ ❐

5-6 الشغل والطاقة في الحركة الدورانية

نحسب الطاقة الحركية لجسم صلب يدور حول محور ثابت من العلاقة:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad (19-5)$$

بوضع

$$v_i = r_i \dot{\theta}_i$$

وملاحظة أن السرعة الزاوية $\dot{\theta}_i$ هي نفسها لكل نقاط الجسم نتيجة صلابته، أي أن:

$$\dot{\theta}_i = \omega$$

تؤول T إلى :

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \qquad (20-5)$$

أو

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad (21-5)$$

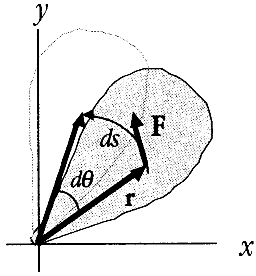
كذلك نجد الشغل اللازم لتدوير منظومة جسيمات زاوية θ حول محور الدوران بكتابة الشغل المبذول لنقل جسيم m من الجسم مسافة $\mathbf{s}$ تحت تأثير قوة $\mathbf{F}$، كما في الشكل (5-7)، فنكتب:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

لكن

$$d\mathbf{s} = -\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\theta}$$

حيث يتجه $d\boldsymbol{\theta}$ عمودياً على الورقة نحو الخارج.



$d\boldsymbol{\theta}$ يتجه خارج الورقة

الشكل (5-7)

فيكون:

$$W = \int -\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\theta})$$

بما أن

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

يصير الشغل

$$W = \int (-\mathbf{F} \times \mathbf{r}) \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

لكن:

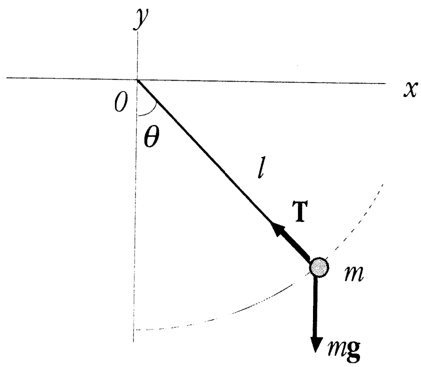
$$\boldsymbol{\tau}_z = -\mathbf{F} \times \mathbf{r}$$

لذا يؤول الشغل اللازم لتدوير جسم صلب حول محور ثابت إلى:

$$W = \int \boldsymbol{\tau}_z \cdot d\boldsymbol{\theta} \qquad (22-5)$$

5-7 البندول البسيط *(The Simple Pendulum)*

يتألف البندول البسيط من جسيم كتلته m يرتبط بخيط طوله l معلق من نقطة ثابتة O، كما هو موضح بالشكل (5-8). بإزاحة m قليلاً عن وضع الاتزان وتركها، يتأرجح البندول في مستو شاقولي.



الشكل (8-5)

لدراسة حركة البندول نستعمل العلاقة (8-4)، فنكتب:

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z\ddot{\theta} \qquad (23-5)$$

حيث τ_z محصلة العزوم بالنسبة لمحور الدوران oz (المار من O عمودياً على الورقة)، وتساوي:

$$\tau_z = -mgl\sin\theta$$

(لماذا وضعنا عزم الشد T حول oz يساوي الصفر، واعتبرنا عزم الوزن سالباً؟)

كما نكتب عزم عطالة الكتلة m بالنسبة لـ oz بالشكل:

$$I_z = ml^2$$

فتصير معادلة الحركة:

$$-mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \qquad (24-5)$$

ومنه:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (25-5)$$

نعتبر الحالتين التاليتين:

(أ) – الزاوية θ صغيرة: عندئذ يكون $\sin\theta \approx \theta$ وتؤول العلاقة (25-5) إلى:

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0 \tag{26-5}$$

حيث وضعنا:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{27-5}$$

يدعى ω_0 **التردد الطبيعي** *(natural frequency)* للبندول.

ثم نكتب حل المعادلة (27-5)، كما هو معروف، بالشكل:

$$\theta=\theta_0\cos(\omega_0 t+\phi) \tag{28-5}$$

فتتغير الزاوية θ جيبياً مع الزمن بسعة عظمى θ_0(الزاوية التي أزحنا البندول بها في البداية)، وتردد زاوي ω_0 يعتمد على طول البندول وتسارع الجاذبية المحلي فقط. لذا يطلق على ω_0 اسم **التردد الطبيعي** لأنه متعلق بطبيعة وخواص البندول، تماماً مثل المنظومة المهتزة المؤلفة من كتلة وزنبرك تماماً التي وجدنا في الفصل الأول أن ترددها الطبيعي متعلق بخواصها الذاتية من كتلة وثابت مرونة للزنبرك.

(ب) – الزاوية θ غير صغيرة: يمكن دراسة الحركة في هذه الحالة بشكل وصفي بواسطة الطاقة الكلية (كما فعلنا عند دراسة الحركة المركزية) فنكتب الطاقة الكلية:

$$E=T+V$$

حيث:

$$T=\tfrac{1}{2}I_z\omega^2=\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{29-5}$$

(لاحظ أن ω تمثل السرعة الزاوية للبندول، أي معدل تغير الزاوية θ مع الزمن $\omega=\dot{\theta}$ وتختلف تماماً عن التردد الطبيعي ω_0!) .

بوضع المستوى الأرضي عند $\theta=\pm\pi/2$، نكتب طاقة الوضع بالشكل:

$$V=-mgl\cos\theta \tag{30-5}$$

فتصير الطاقة الكلية:

$$E = \tfrac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \qquad (31-5)$$

أي أن:

$$\tfrac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 = E + mgl\cos\theta \qquad (32-5$$

نلاحظ من (5-30) أن طاقة الوضع $V=-mgl\cos\theta$ محدودة بين$+mgl$و$-mgl$، لذلك فإن الحركة ستكون اهتزازية طالما أن $mgl>E>-mgl$، وعندما $E=\pm mgl$ فإن $\dot{\theta}=0$ ويعود الجسم بالإتجاه المعاكس عند هذه النقطة. أما اذا كان $E>mgl$ فالحركة غير اهتزازية لأنه لايمكن أن تصير $\dot{\theta}$مساوية للصفر أبداً، أي أن البندول لا يهتز بل يدور في دائرة طوال الوقت.

بالطبع لايمكن للطاقةE أن تكون أقل من $-mgl$ لأن$\dot{\theta}^2$ستكون سالبة عندئذ وهذا غير ممكن طبعاً..

الآن: بعد وصف طبيعة الحركة بحسب طاقة الجسم الكليةE نعود الى حل معادلة الحركة مستخدمين معادلة الطاقة (5-25) فنكتب:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l}\cos\theta} \qquad (33-5)$$

أو

$$\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(E/mgl) + \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\; t \qquad (34-5)$$

يمكن تحويل التكامل الأخير الى آخر معروف باجراء بعض التحويلات الرياضية ، فنفترض أن:

$$E = -mgl\cos\alpha \qquad (35-5)$$

و

$$\sin\phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\alpha/2)} \qquad (36-5)$$

و

$$a = \sin(\alpha / 2) \qquad (37-5)$$

بكتابة $\cos\theta=1-2\sin^2\theta/2$ و $\cos\alpha=1-2\sin^2\alpha/2$ ، نجد أن:

$$\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha} = \sqrt{2}\ \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

فيكون:

$$\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha} = \sqrt{2}\ \sin\frac{\alpha}{2}\ \sqrt{1-(\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}})}\ = \sqrt{2}\ \sin\frac{\alpha}{2}\ \cos\phi$$

كما نجد باشتقاق (36-5) أن:

$$\cos\phi d\phi = \frac{1}{2a}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{2a\cos\phi d\phi}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

بتعوض ϕ و θ في (34-5) نجد:

$$\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\phi}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\ t \qquad (38-5)$$

حيث اعتبرنا $\phi_0=0$ للسهولة.

يسمى التكامل (38-5) **تكاملاً قطعياً** *(Elliptic Integral)*.

إذا كانت a صغيرة عندئذ يمكن نشر (38-5) على شكل سلسلة قوى فنجد:

$$\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\phi}} = \int_0^{\phi}[1+\tfrac{1}{2}a^2\sin^2\phi + \cdots\ ]d\phi = \sqrt{\frac{g}{l}}\ t \qquad (39-5)$$

ومنه:

$$\phi + \frac{a^2}{8}(2\phi - \sin 2\phi) + \cdots = \sqrt{\frac{g}{l}}\ t \qquad (40-5)$$

الآن: نلاحظ من (5-33) أن الجسم يقوم باهتزازة كاملة عندما تصير سرعته الزاوية $\dot{\theta}$معدومة (نقطة دوران) مرتين متتاليتين، وهذا يحصل عندما $0=\theta$و $\alpha=\theta$، أي عندما تتغير φ من الصفر الى 2π. عندئذ يكون:

$$2\pi + \frac{a^2}{8}(4\pi - \sin 4\pi) + \cdots = \sqrt{\frac{g}{l}}\; T$$

أي أن تردد الحركة يساوي :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\; [1 + \frac{a^2}{4} + \cdots] \qquad (41-5)$$

نلاحظ مباشرة أنه إذا كانت a صغيرة بحيث يمكن إهمال الحدود الحاوية على a^2 أو أكبر عندئذ نعود إلى العلاقة المعروفة للإهتزازات الصغيرة:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ونجد التردد الزاوي ωمن (5-41):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}\; [1 - \frac{a^2}{16} + \cdots] \qquad (42-5)$$

يمكن للقارئ أن يقنع نفسه بأن أكبر قيمة للزاوية θهي α، وعندما تكون a صغيرة فإن α ستكون صغيرة أيضا لتصير θصغيرة، ونحصل على نفس النتائج التي وجدناها في حالة الاهتزازات الصغيرة للدور والتردد ومعادلة الحركة.

5-8 البندول المركب (الفيزيائي) *(The Compound (Physical) Pendulum)*

نطلق اسم بندول مركب على كل جسم صلب معلق يهتز حول محور ثابت لا يمر بمركز كتلة الجسم حتى يكون هناك عزم كلي للقوى الخارجية ويكون هناك احتمال

لحركة اهتزازية.

نحدد موضع الجسم الصلب بالزاوية التي يصنعها الخط الواصل بين نقطة الدوران ومركز الكتلة مع الشاقول ، كما هو موضح بالشكل (5-9).

لدراسة حركة الجسم نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية ونكتب:

$$\tau_0 = -Mgh\sin\theta = I_0\ddot{\theta} \qquad (43-5)$$

حيث h البعد العمودي بين مركز الكتلة cm ومحور الدوران المار من النقطة o عمودياً على الورقة، و I_0 عزم القصوور الذاتي للجسم بالنسبة لمحور الدوران oz، فاذا افترضنا أن :

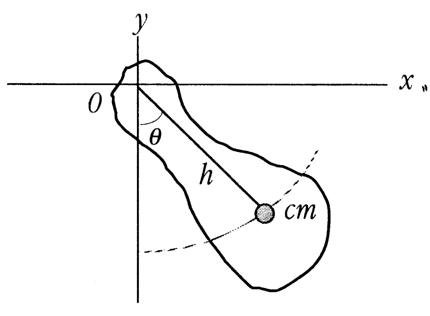
$$I_0 = Mk_0^2 \qquad (44-5)$$

حيث k_0 نصف قطر الدوران بالنسبة للمحور oz، يكون:

$$-Mgh\sin\theta = Mk_0^2\ddot{\theta}$$

ومنه

$$\ddot{\theta} + \frac{gh}{k_0^2}\sin\theta = 0 \qquad (45-5)$$



الشكل (5-9)

نلاحظ أن (5-45) تكافىء معادلة بندول بسيط طوله:

$$l = \frac{k_0^2}{h} \qquad (46-5)$$

فاذا افترضنا أن النقطة o' تبعد عن o (نقطة تعليق الجسم) مسافة l لوجدنا أن :

$$l = h + h' \tag{47-5}$$

حيث تدل h' على بعد o' عن مركز الكتلة c .

يطلق على o' اسم **مركز الاهتزازات** *(Center of Oscillations)* .

نستنتج من (5-46) و (5-47) أن:

$$k_0^2 - h^2 = hh' \tag{48-5}$$

باستخدام نظرية المحاور المتوازية ، نكتب:

$$I_0 = I_{cm} + Mh^2$$

أي أن:

$$Mk_0^2 = Mk_{cm}^2 + Mh^2$$

بالتعويض في (5-48) نجد:

$$k_{cm}^2 = hh' \tag{49-5}$$

حيث k_{cm} نصف قطر دوران الجسم الصلب بالنسبة لمركز الكتلة.

فالنقطتان o و o' متناظرتان بحيث أنه لو اهتز الجسم حول محور مار من الأولى أو من الثانية لكان له نفس الدور تماما لأن:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_0^2}{gh}}$$

كما أن:

$$T_{0'} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{k_{0'}^2}{gh'}}$$

أي أن:

$$T_0 = T_{0'}$$

فدور الحركة لايتغير سواء علقنا الجسم من النقطة O أو من نظيرتها O' !

❏ مثل 5-5

يهتز قرص متجانس نصف قطره a حول محور مار من النقطتين A وB ، كما في الشكل (5-9أ). مادور الاهتزازات الصغيرة وما قيمة b التي تجعله أكبر ما يمكن؟

الحل: نلاحظ في هذا المثل أن القرص يمثل بندولاً مركباً يقع مركز كتلته في مركزه الهندسي o، فنكتب معادلة الحركة:

$$\tau_{AB} = I_{AB}\ddot{\theta}$$

حيثτ_{AB}عزم القوى الخارجية (وزن القرص فقط) ، حول محور الدوران AB ويساوي (انظر الشكل(5-16 ب)):

$$\tau_{AB} = -Mgb\sin\theta$$

بحسب المثل (5-4) فان:

$$I_{AB} = \tfrac{1}{4}Ma^2 + Mb^2$$

وتصير معادلة الحركة:

$$(\tfrac{1}{4}Ma^2 + Mb^2)\ddot{\theta} = -Mgb\sin\theta$$

ومنه:

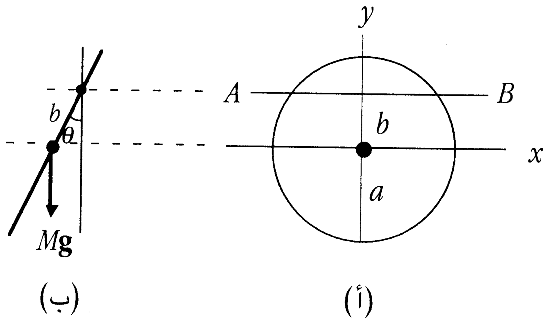
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

حيث افترضنا أن الاهتزازات صغيرة السعة $(\sin\theta \approx \theta)$ ووضعنا :

$$\omega_0^2 = \frac{gb}{a^2/4 + b^2}$$

فيكون الدور:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + 4b^2}{4gb}}$$



الشكل (16-5)

أما قيم b التى تجعل الدور أكبر ما يمكن فهي تلك التي تجعل ω_0 أصغر ما يمكن لذا نشتق $\omega_0{}^2$ ونكتب :

$$2\omega_0 d\omega_0 = \frac{g(a^2/4+b^2)-2b(gb)}{(a^2/4+b^2)^2} = 0$$

بحل هذه المعادلة نجد :

$$b = a/2$$

عندها يكون :

$$\omega_0 = \sqrt{g/a}$$

و

$$T = 2\pi\sqrt{a/g}$$

❐

5 - 10 الحركة العامة للأجسام الصلبة في مستو؛ انتقال ودوران

افترضنا حتى الآن في هذا الفصل أن محور دوران الجسم الصلب يبقى ثابتاً في الفضاء، أما إذا لم يكن الأمر كذلك، بمعنى أن الجسم يدور وينتقل من مكانه بنفس الوقت، فعلينا استخراج نظرية ملائمة لهذه الحالة.

لذلك نكتب من قانون نيوتن الثاني :

$$\boldsymbol{\tau}_z = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} \qquad (51-5)$$

حيث $\boldsymbol{\tau}_z$ محصلة العزوم المؤثرة على الجسم بالنسبة لمحور الدوران و $\mathbf{L}_z$ الزخم الزاوي للجسم بالنسبة لنفس المحور.

تنسب $\boldsymbol{\tau}_z$ و $\mathbf{L}_z$، في (5-51)، لمنظومة محاور عطالية، أي ثابتة في الفضاء. فإذا اعتبرنا منظومة محاور مركزها مركز كتلة الجسم الصلب وحددنا موقع أي جسيم منه m_i بالنسبة لهذه المنظومة، عندئذ نكتب موضع هذا الجسيم $\mathbf{r}_i$ بالنسبة لمنظومة المحاور العطالية الثابتة بالشكل:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{cm}$$

حيث $\mathbf{r}_{c.m}$ متجه موضع مركز كتلة الجسم الصلب بالنسبة لمبدأ منظومة المحاور العطالية.

باشتقاق طرفي العلاقة السابقة نجد:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{cm}$$

بالتعويض في (5-51) نجد:

$$\boldsymbol{\tau}_z = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}) = \frac{d}{dt}\sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

أو

$$\boldsymbol{\tau}_z = \sum_i [(\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{cm}) \times \mathbf{F}_i] = \frac{d}{dt}\sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{cm}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{cm})$$

بنشر الطرفين، وملاحظة أن كلا من $\sum m_i \mathbf{r}'_i$ و $\sum m_i \mathbf{v}'_i$ يساوي الصفر (بحسب تعريف مركز الكتلة)، نجد أن المعادلة السابقة تؤول إلى:

$$\sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_{cm} \times \sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}\sum_i (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) + \sum_i m_i \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}) \qquad (52-5)$$

لكن

$$\sum_i \mathbf{F}_i = M\mathbf{a}_{cm}$$

كما أن :

$$\sum_i m_i \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{cm} \times \mathbf{v}_{cm}) = M[\frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} \times \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{r}_{cm} \times \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt}]$$

لذا تؤول (5-52) إلى:

$$\sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i'$$

لكن المجموع في الطرف الأيمن هو الزخم الخطي للجسم الصلب بالنسبة لمركز كتلته والمجموع في الطرف الأيسر هو العزم الكلي للقوى حول مركز الكتلة، لذا نكتب:

$$\tau_{cm} = \frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} \qquad (53-5)$$

هذه النتيجة صحيحة حتى لو كان مركز الكتلة متسارعاً، وإذا اخترنا نقطة أخرى بدلا من مركز الكتلة لحساب الزخم الزاوي والعزم بالنسبة لها لوجب أن تكون ساكنة بالنسبة لمنظومة المحاور العطالية حتى يمكن تطبيق (5-53).

5 - 11 الحركة المستوية العامة للجسم الصلب

إذا تحرك الجسم الصلب بحيث بقيت كل ذراته موازية لمستو ثابت دوماً عندئذ نقول إن حركة الجسم **مستوية** *(Laminar Motion)*. يمكن لمحور الدوران، في هذا النوع من الحركات، أن ينتقل من مكانه شريطة أن يبقى موازياً لنفسه، مثل تدحرج اسطوانة على مستو مائل .

أما المعادلات اللازمة لتحديد حركة الجسم وموضعه في كل لحظة فهي :

(أ) – حركة مركز الكتلة:

$$\mathbf{F}_T = M\mathbf{a}_{cm} \qquad (54-5)$$

حيث $\mathbf{F}_T$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم، وM كتلته، و$\mathbf{a}_{cm}$ تسارع مركز كتلته.

(ب) الحركة الدورانية حول مركز الكتلة:

$$\tau_{cm} = \frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} \qquad (55-5)$$

حيث τ_{cm} عزم القوى الخارجية حول مركز الكتلة و $\mathbf{L}_{cm}$ الزخم الزاوي بالنسبة لهذا المركز، الذي يعطي في هذه الحالة بالعلاقة:

$$\mathbf{L}_{cm} = I_{cm}\omega \qquad (56-5)$$

حيث $\boldsymbol{\omega}$ السرعة الزاوية للدوران.

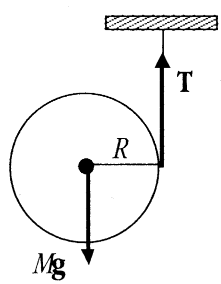
❐ مثل 6-5

يلف خيط طويل حول محيط دائرة عظمى لكرة صلبة، نصف قطرها R وكتلتها M. يثبت الطرف الآخر للخيط، بينما تسقط الكرة نحو الأرض، كما في الشكل (5-9). ما تسارع مركز الكتلة والشد في الخيط؟

الحل: نلاحظ من الشكل (5-9) أن القوى المؤثرة على النظام هي: الوزن $M\mathbf{g}$ نحو الأسفل وشد الخيط $\mathbf{T}$ نحو الأعلى.

نكتب معادلة حركة مركز الكتلة:

$$Mg - T = Ma$$



الشكل (5-17)

كما نعتبر العزوم حول محور مار من مركز الكتلة فنجد:

$$\tau_{cm} = TR$$ (ماذا عن عزم الوزن Mg؟)

فنكتب معادلة الحركة الدورانية حول c :

$$TR = I_{cm}\ddot{\theta} = I_{cm}\alpha$$

حيث I_{cm} عزم القصور الذاتي حول مركز الكتلة الذي يساوي:

$$I_{cm} = \tfrac{2}{5}MR^2$$

و α التسارع الزاوي للقرص حيث نجده بدلالة تسارع مركز الكتلة من العلاقة التي تربط بين التسارع الخطي لنقطة على محيط الكرة بتسارعها الزاوي، فنكتب:

$$\alpha = a/R$$

فيكون:

$$TR = (\tfrac{2}{5}MR^2)a/R$$

بحل هذه المعادلات نجد:

$$a = 5g/7$$

و

$$T = 2Mg/7 \qquad \square$$

---

5 - 12 الاتزان السكوني للأجسام (Static Equilibrium of Rigid Bodies)

وجدنا في الفقرة السابقة أن الحركة العامة للجسم الصلب توصف بحركة مركز كتلتها تحت تأثير محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم بالإضافة إلى الحركة الدورانية حول مركز الكتلة الناتجة عن العزم الكلي لهذه القوى حول مركز الكتلة نفسه. فحتى يتزن الجسم الصلب تماما يجب أن يبقى مركز كتلته ساكناً، أي يجب أن يكون:

$$\mathbf{F}_T = 0 \qquad (57-5)$$

كما يجب أن لايدور الجسم بتاتاً، أي أن:

$$\tau_T = \sum_i (\mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i) = 0 \qquad (58-5)$$

حيث يمكن أخذ العزوم حول أي محور، لأن عدم دوران الجسم بتاتاً يعني أن محصلة العزوم حول أي محور يجب أن تكون مساوية للصفر دوماً.

تعطي المعادلات (5-57) و(5-58) الشروط الأساس اللازمة ليتزن الجسم الصلب تماماً، إلاّ أن حلها في الحالة العامة لدوران وانتقال جسم صلب في الفضاء قد لايكون ممكناً لعدم توفر العدد الكافي من المعادلات. أما في الحالة الخاصة لدوران الجسم حول محور ثابت، أو الحركة المستوية للجسم الصلب فإن (5-58) تؤول إلى:

$$\tau_z = 0 \qquad (59-5)$$

حيث τ_z محصلة العزوم المؤثرة على الجسم بالنسبة لمحور الدوران. ويصير ممكناً حل معادلات الاتزان، كما سنرى في المثل التالي .

❐ مثل 5-7

تستند نصف كرة صلبة نصف قطرها a وكتلتها M بسطحها الكروي على حائط شاقولي خشن وأرض أفقية خشنة بحالة اتزان، كما في الشكل (5-18). ماالزاوية التي يصنعها السطح المستوى لنصف الكرة مع الأرض اذا كان معامل الاحتكاك بين جميع السطوح المتماسة هو μ؟

الحل: لنكتب شرطي الاتزان، فمن مجموع القوى نجد:

$$\mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{r1} + \mathbf{w} + \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_{r2} = 0$$

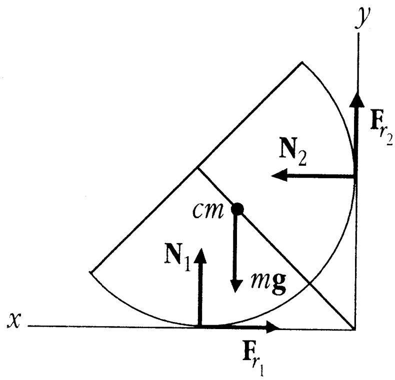
وبأخذ مركبات هذه العلاقة على ox وoy في الشكل (5-18) نجد:

$$N_2 - F_{r1} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{r1} = N_2$$

و

$$N_1 + F_{r2} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{r2} = mg - N_1$$

بأخذ مجموع العزوم حول أي محور عمودي على المستوي xy ، كالمار من A، نجد:



الشكل (18-5)

$$N_2 a - F_{r2} a - mgy_c \sin\theta = 0$$

حيث y_c بعد مركز الكتلة عن مركز الكرة الذي يمكن البرهان على أنه يساوي:

$$y_c = 3a/8$$

بملاحظة أن:

$$F_{r1} = \mu N_1$$

و

$$F_{r2} = \mu N_2$$

وحل المعادلات السابقة نجد:

$$N_1 = m g/(\mu^2 + 1)$$

و

$$N_2 = \mu m g/(\mu^2 + 1)$$

و

$$\sin\theta = 8(\mu^2 + \mu)/3(\mu^2 + 1) \approx 8\mu/3$$ ❐

5 - 13 حركة جسم صلب تحت تأثير قوة دفع *(Impulsive Force)* (اختياري)

عرفنا في فصل سابق قوة الدفع بأنها تلك المؤثرة على جسيم لفترة زمنية قصيرة نسبياً بحيث تؤدي لتغيير سرعته بشكل مفاجىء، في هذه الفقرة ندرس

تأثير قوة من هذا النوع على الحركة المستوية لجسم صلب.

فإذا افترضنا أن لدينا جسماً صلباً حرالحركة في مستو وتعرض لتأثير قوة دفع لفترة زمنية فإنه سيتحرك، بشكل عام، حركة انتقالية ودورانية بنفس الوقت.

توصف الحركة الانتقالية بالعلاقة:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}_{cm} \qquad (60-5)$$

بحساب دفع هذه القوة نجد:

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{F}dt = M\Delta\mathbf{v}_{cm} \qquad (61-5)$$

أي أن سرعة مركز الكتلة تتغير بمقدار:

$$\Delta\mathbf{v}_{cm} = \frac{\mathbf{J}}{M} \qquad (62-5)$$

أما الحركة الدورانية للجسم فتوصف بالعلاقة :

$$\tau_{cm} = \frac{dL_{cm}}{dt} = I_{cm}\frac{d\omega}{dt} \qquad (63-5)$$

بمكاملة هذه العلاقة نجد الدفع الزاوي *(Rotational Impulse)* :

$$\hat{L}_{cm} = \int \tau_{cm}\, dt = I_{cm}\Delta\omega \qquad (64-5)$$

أي أن تغير السرعة الزاوية للجسم نتيجة هذا الدفع الزاوي هي:

$$\Delta\omega = \frac{\hat{L}_{cm}}{I_{cm}} \qquad (65-5)$$

نلاحظ أنه إذا كان خط تأثير قوة الدفع يبعد مسافة b عن مركز كتلة الجسم الصلب فإن:

$$\tau_{cm} = Fb \qquad (66-5)$$

ومنه:

$$\hat{L}_{cm}=\int \tau_{cm}\,dt=\int Fbdt=bJ$$

أي أن:

$$\Delta\omega=\frac{bJ}{I_{cm}} \qquad (67-5)$$

لا بأس من الإشارة إلى أنه إذا كان الجسم مقيداً ليدور حول محور ثابت لوجب اعتبار عزم عطالته حول هذا المحور بدلاً من عزم عطالته حول مركز كتلته في العلاقات السابقة. كما أنه إذا تعرض الجسم لعدة قوى دافعة لوجب اعتبار مجموع الدفع في (5-62) و (5-67) أي أن:

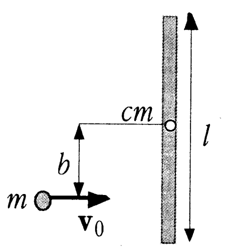
$$\Delta V_{cm}=\frac{J_1+J_2+\cdots}{I_{cm}} \qquad (68-5)$$

و

$$\Delta\omega=\frac{b_1J_1+b_2J_2+\cdots}{I_{cm}} \qquad (69-5)$$

❐ مثل 5-8

ترتطم كرة كتلتها m، تسير بسرعة أفقية v_0، بقضيب طوله l وكتلته M يقف بوضع شاقولي على سطح أفقي أملس، كما في الشكل (5-19). ما سرعة مركز كتلة للقضيب بعد التصادم إذا كان التصادم غير مرن جزئياً وكان معامل الارتداد e؟



الشكل (5-19)

الحل: نكتب من مبدأ حفظ الزخم الخطي :

$$m\mathbf{v}_0 = M\mathbf{v}_{cm} + m\mathbf{v}_1$$

حيث $\mathbf{v}_1$ سرعة الكرة بعد التصادم.

من ناحية أخرى، نكتب من مبدأ حفظ الزخم الزاوي:

$$m\mathbf{v}_0 b = M\mathbf{v}_{cm} b + I_{cm}\omega$$

حيث ω السرعة الزاوية للقضيب بعد التصادم.

بالاستفادة من تعريف معامل الارتداد e نكتب:

$$e v_0 = v_M - v_1$$

حيث v_M سرعة القضيب الانتقالية والدورانية بعد التصادم مباشرة وتساوي:

$$v_M = v_{cm} + b\omega$$

بذلك نجد :

$$e v_0 = v_{cm} + b\omega - v_1 \qquad \text{(لماذا؟)}$$

بتعويض $I_{cm} = Ml^2/12$ وحل المعادلات السابقة نجد:

$$v_{cm} = (1+e)v_0 / (M/m + 12b^2/l^2 + 1)$$

و

$$v_1 = v_0 - (M/m)v_{cm}$$

و

$$\omega = (12b/l^2)v_{cm} \qquad \square$$

مسائل

1-5 يتألف قرص ساعة من حلقة كتلتها M ونصف قطرها a مرتبطة بزنبرك يؤثر عليها بعزم ارجاع $\tau = -k\theta$. ادرس حركة القرص بفرض أنه أدير بزاوية ابتدائية θ_0.

2-5 يركب دولاب كتلته M ونصف قطر دورانه k على محور أفقي خاضع لعزم إرجاع $\tau = -K\theta$ ناتج عن زنبرك مرتبط بالمحور ويوجد على محيط الدولاب كتلة صغيرة m وعلى بعد $2k$ من محوره. ادرس أنواع الحركة الممكنة وحدد نقاط الاتزان المستقر وغير المستقر وجد تردد الاهتزازات الصغيرة حول نقاط التوازن المستقر. اعتبر الحالتين الآتيتين: $K>2mgk/\pi$ و $K>4mgk/\pi$. ماذا يحدث عندما $K<4mgk/\pi$ (مساعدة: حل المعادلة المثلثية الناتجة بالرسم).

3-5 تخضع مروحة طائرة لعزم دفع من الشكل: $\tau = \tau_0(1+\alpha\cos\omega t)$ وإلى عزم مقاومة نتيجة للاحتكاك من الشكل: $\tau_r = -b\theta$. جد معادلة الحركة الدائمة.

4-5 اكتب معادلة الحركة لبندول بسيط مؤلف من كتلة صغيرة m معلقة بخيط طوله l خاضعة لعزم احتكاك $-b\theta$ عند نقطة الدوران ولقوة احتكاك مع الهواء $-b_2\mathbf{v}$ حيث $\mathbf{v}$ سرعة m. ماالزمن اللازم حتى تتناقص سعة الاهتزازات الى $1/e$ من قيمتها الابتدائية بفرض أن الاهتزازات صغيرة. كيف يجب اختيار m و l حتى يهتز البندول أطول فترة ممكنة؟ كيف يجب اختيار m و l حتى يهتز البندول أكبر عدد من المرات؟

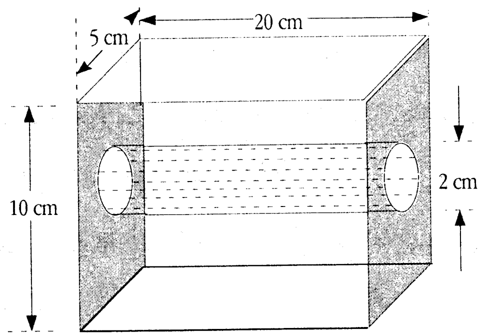
5-5 يعلق بندول مركب «ليهتز حول أحد محورين متوازيين مارين من نقطتين O و O' اللتين تقعان على خط مستقيم يمر من مركز الكتلة وتبعدان مسافتين h و h' عنه، ويقاس الدوران τ و τ' للاهتزازات الصغيرة حول O و O'، على الترتيب. افترض $\tau = \tau'$ وجد العلاقة التي تعطي g بدلالة الكميات المقاسة. ضع $\tau'' = \tau(1+\delta)$، حيث $\delta << 1$ وجد التصحيح اللازم إضافته الى علاقتك السابقة ليحتوي على حدود من المرتبة δ فقط.

6-5 يقع قرص رقيق نصف قطره a في المستوى xy بحيث يقع مركزه عند نقطة المبدأ وكثافة النصف الموجود فوق محور السينات σ بينما كثافة النصف الأسفل σ'. جد عزم عطالته حول كل من ox و oy و oz وحول محور موازي لـ oz يمر من مركز الكتلة.

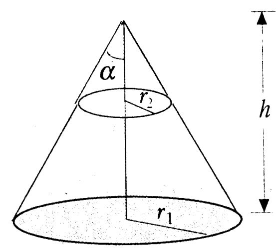
7-5 احسب عزم عطالة أضلاع هرم متساوي الأضلاع حول محور يمر من مركزه وأحد رؤوسه.

8-5 جد عزم عطالة مخروط كتلته m، وارتفاعه h، وزاويته الرأسية α، حول محور تناظره وحول محور يمر من ذروته عمودياً على محور التناظر. استفد من نتائجك لايجاد عزم عطالة مقطع من المخروط، كما هو موضح بالشكل (5-20)، حول محور أفقي يمر من مركز الكتلة.

9-5 جد عزوم عطالة الجسم الموضح بالشكل (5-21) حول المحاور المارة من مركز كتلته والموازية لكل طرف من أطرافه الثلاثة.



الشكل (5-21)



الشكل (5-20)

10-5 إلى أي ارتفاع يمكن لرجل وزنه W الصعود على سلم طوله l ووزنه w قبل أن يبدأ السلم بالإنزلاق إذا كان يستند على حائط شاقولي خشن صانعا معه زاوية α بفرض أن معامل الاحتكاك بين السلم والحائط وبين السلم والارض هو μ؟

11-5 جد عزم القصور الذاتي لصفيحة متجانسة على شكل نصف دائرة حول محور عمودي عليها ويمر من مركز كتلتها.

12-5 تعلق كتلة m بنهاية قضيب صلب كتلته M وطوله l. ما دور الحركة إذا تركت المنظومة لتهتز كبندول بسيط معلق من النهاية الأخرى للقضيب؟

13-5 تهتز صفيحة مربعة متجانسة كالبندول حول إحدى زواياها . مادور الحركة وأين يقع مركز الاهتزازات إذا كان محور الدوران (أ) عمودياً على مستو الصفيحة؟ (ب) يقع في نفس مستويها؟

14-5 برهن أن دور بندول مركب يساوي $2\pi(l/g)^{1/2}$ حيث l المسافة بين نقطة التعليق ومركز الدوران.

15-5 يلف خيط عدة لفات حول كرة صلبة وتمسك نهايته وتترك الكرة لتسقط الى الأرض. ما تسارع مركزها؟

16-5 يحمل رجلان لوحا خشبيا طوله l وكتلته m. برهن أنه اذا أفلت أحد الرجلين اللوح فإن الوزن الذي يحمله الرجل الآخر يتغير من $mg/2$ إلى $mg/4$.

17-5 تتزن اسطوانة نصف قطرها a على ذروة اسطوانة ثابتة خشنة تماما نصف قطرها b $(b>a)$، بحيث يتوازى محورا الاسطوانتين. عند أي نقطة ستغادر الأسطوانة الأولى الأسطوانة الثانية اذا تدحرجت عليها بدءاً من السكون؟

18-5 يتزن قضيب طوله l وكتلته m بوضع شاقولي على أرض خشنة ثم يتعرض لدفعة خفيفة جداً بحيث يهوي الى الأرض مع بقاء نهايته الملامسة للأرض ثابتة الى أن يصنع زاوية θ_0 تبدأ عندها بالإنزلاق. (أ) جد المركبة الأفقية والشاقولية لرد فعل الأرض بدلالة θ الزاوية بين القضيب والشاقول . (ب) جد θ_0. افترض أن معامل الاحتكاك بين الأرض ونهاية القضيب هو μ.

19-5 تقذف كرة بسرعة ابتدائية v_0 نحو الأعلى على مستو مائل بزاوية θ، فتنزلق عليه مبدئياً بدون دوران. جد موضع الكرة على المستوى بدلالة الزمن وحدد الموضع الذى تبدأ عنده الكرة بالدوران ، مفترضا أن معامل الاحتكاك بينهما هو μ.

20-5 ماعزم القصور الذاتي لقضيب متجانس طوله l وكتلته m حول محور عمودي عليه ويمر من نقطة تبعد $l/4$ عن طرفه؟

21-5 جد عزم القصور الذاتي ونصف قطر الدوران لصفيحة مربعة حول قطر فيها.

22-5 ما الطاقة الحركية لأسطوانة مفرغة كتلتها M ونصف قطرها a تتدحرج بدون انزلاق على أرض أفقية بسرعة v؟

23-5 كيف تتغير اجابة المسألة 22-5 لو كانت الاسطوانة مصمتة؟

24-5 تخضع عجلة كتلتها M ونصف قطرها a لقوة مماسية ثابتة F_0 بحيث تدور حول

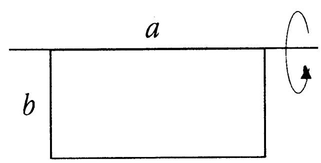
محور عمودي عليها ويمر من مركزها. برهن أن التسارع الزاوي للعجلة هو $F_0 a/Mk^2$ حيث k نصف قطر الدوران.

25-5 ماالزمن اللازم للعجلة في المسألة 5-30 لتصير سرعتها الزاوية ω_0 إذا بدأت من السكون؟ ماالشغل المبذول على العجلة والقدرة الكلية الناتجة؟

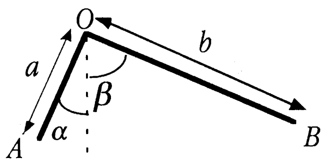
26-5 تعلق كرة مصمتة نصف قطرها a وكتلتها m من نقطة على سطحها وتبدأ بالاهتزاز حول محور يمر من نقطة التعليق. مادور الحركة وطول البندول البسيط؟

27-5 تهتز صفيحة مستطيلة طولها a وعرضها b حول محور أفقي يمر من ضلعها a، كما في الشكل (5-22). مادور الحركة وماطول البندول البسيط المكافىء؟

28-5 يتصل قضيبان OA وOB ببعضهما عند النقطة O بحيث أن الزاوية بينهما $90°$ ويعلقان من النقطة O، كما في الشكل (5-23). برهن أنه في حالة الاتزان فإن الزاويتين $\alpha = \tan^{-1}(a/b)$ و$\beta = 90° - \tan^{-1}(a/b)$.



الشكل (5-22)



الشكل (5-23)